OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a V – a

PROBLEMA 1. Suma a cinci numere naturale distincte două câte două este 575. Ştiind că suma diferenţelor dintre cel mai mare dintre ele şi fiecare dintre celelalte 4 numere este 10, aflaţi cele 5 numere.

PROBLEMA 2. Să se afle numerele naturale x ştiind că, adunând x cu suma cifrelor lui x se obţine 2018.

PROBLEMA 3. Pe un monitor apare scris un număr natural. Prin **pas** se înţelege înlocuirea numărului de pe monitor, cu suma dintre produsul cifrelor sale şi 23. Se ştie că primul număr care apare pe monitor este 23.

a) Aflaţi ce număr este scris pe monitor după 10 paşi.

b) Aflaţi care este al 2018-lea număr care apare pe monitor.

PROBLEMA 4. Se consideră numerele a şi b,

$$a = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + ... + 2017 \cdot 2018$$
$$b = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 7 + ... + 2018 \cdot 2019.$$

a) Aflaţi ultima cifră a numărului $b - a$;

b) Arătaţi că numărul $a + b + 2018$ nu este pătrat perfect.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VI – a

PROBLEMA 1. Să se determine $x, y, z \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$, pentru care $x + \dfrac{1}{y + \dfrac{1}{z}} = \dfrac{30}{13}$.

PROBLEMA 2. Se consideră numerele naturale $a = 5n + 6$, $b = 4n + 5$ şi $c = n + 1$, unde $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că:

a) $[b, c] = b \cdot c$;

b) $(a, b) + (a, c)$ este număr par.

$[x, y]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun a numerelor x şi y, iar (x, y) reprezintă cel mai mare divizor comun a numerelor x şi y.

PROBLEMA 3. Fie ABC un triunghi oarecare. Construim în exteriorul său triunghiurile isoscele MAB şi NAC cu $[AB] \equiv [AM]$ şi $[AC] \equiv [AN]$, astfel încât $[MC] \equiv [BN]$. Demonstraţi că $\widehat{BAM} \equiv \widehat{CAN}$.

PROBLEMA 4. Considerăm unghiurile $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \ldots, \widehat{A_nOA_{n+1}}, \widehat{A_{n+1}OA_1}$, în jurul unui punct O, astfel încât

$$m(\widehat{A_1OA_2}) = 1^\circ, \quad m(\widehat{A_2OA_3}) = 2^\circ, \quad m(\widehat{A_3OA_4}) = 3^\circ, \ldots, \; m(\widehat{A_nOA_{n+1}}) = n^\circ,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $m(\widehat{A_{n+1}OA_1}) = 9^\circ$, aflaţi numărul n.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 2 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VII – a

PROBLEMA 1. Determinati perechile (a, b) de numere naturale cu $a \geq b$, pentru care numărul $A = \dfrac{a-b}{1+ab}$ este natural.

PROBLEMA 2.

a) Să se demonstreze că, dacă a şi b sunt două numere raţionale pozitive cu $a < b$, atunci $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{\sqrt{a \cdot b}} < \dfrac{1}{a}$;

b) Să se arate că $\dfrac{2}{3} < \left(\sqrt{6}\right)^{-1} + \left(\sqrt{15}\right)^{-1} + \left(\sqrt{35}\right)^{-1} < \dfrac{16}{15}$.

PROBLEMA 3. În triunghiul ABC, fie D mijlocul laturii (AC), iar $(DE$ şi $(DF$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle ADB$, respectiv $\sphericalangle CDB$ $(E \in (AB)\,,\ F \in (BC))$. Arătaţi că, dacă $EF \cap DB = \{M\}$, atunci $EF = 2 \cdot MD$.

PROBLEMA 4. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Fie D mijlocul laturii (BC), M mijlocul segmentului (AD), N piciorul perpendicularei din D pe BM şi E simetricul lui B faţă de M. Arătaţi că:

a) $ADCE$ este dreptunghi;

b) $m(\sphericalangle ANC) = 90°$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a VIII – a

PROBLEMA 1.

a) Să se demostreze că $(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$, oricare ar fi $x, y, z \in (0,\infty)$;

b) Fie numerele reale $x, y, z \geq 1$, astfel încât $x+y+z=6$.Arătaţi că

$$\frac{x^2+3}{3x^2+1}+\frac{y^2+3}{3y^2+1}+\frac{z^2+3}{3z^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

PROBLEMA 2. Se consideră expresia $E(x)=3x^3+9x^2+6x+2$, unde $x\in\mathbb{N}$.

a) Să se arate că pentru orice număr natural x, expresia x^3+3x^2+2x se poate scrie ca produs de trei numere naturale consecutive;

b) Să se demonstreze că nu există $x\in\mathbb{N}$ pentru care $E(x)$ să fie cub perfect.

PROBLEMA 3. Se consideră o piramidă regulată $VABCD$ cu $VO=AB=12cm$, unde O este centrul bazei. Fie punctul M proiecţia punctului O pe CV, punctul N mijlocul segmentului $[BC]$, iar punctul G centrul de greutate al triunghiului VAD.

a) Să se demonstreze că $\frac{VM}{MC}=2$;

b) Să se afle distanţa de la punctul M la planul (VBD);

c) Să se demonstreze că punctele M, N, G şi A sunt coplanare.

PROBLEMA 4. Fie trapezul $ABCD$ cu $AB\parallel CD$, $\frac{AB}{CD}=\sqrt{3}$ şi $\{Q\}=AD\cap BC$. Prin Q se construieşte perpendiculara MQ pe planul (ABC). Ştiind că $m(\sphericalangle((MAB),(ABC)))=30^o$, să se afle $m(\sphericalangle((MAB),(MCD)))$.

---

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

[2] Toate problemele sunt obligatorii;

[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a IX – a

PROBLEMA 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale, următoarele ecuaţii:

a) $x[x] + x\{x\} + \{x\}[x] = x^2 + [x]^2 + \{x\}^2$;

b) $\{x\} + \dfrac{1}{\{x\}} = [x] + \dfrac{1}{[x]}$.

$\{x\}$ şi $[x]$ reprezintă partea fracţionară, respectiv partea întreagă a numărului real x.

PROBLEMA 2. Arătaţi că oricare ar fi numerele reale x şi y, au loc următoarele inegalităţi:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

PROBLEMA 3.

a) Demonstraţi că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate, dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$.

b) Pe laturile triunghiului ABC se consideră punctele $M \in (BC), N \in (CA), P \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{BM}{BC} = m$, $\dfrac{CN}{CA} = n$, $\dfrac{AP}{AB} = p$. Se notează cu G şi G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, respectiv MNP. Arătaţi că:

i) Punctul G' se află pe mediana din A a triunghiului ABC, dacă şi numai dacă $n+p = 2m$;

ii) Punctele G şi G' coincid, dacă şi numai dacă $m = n = p$.

PROBLEMA 4. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ şi $2x_n + 3x_{n+2} \leq 5x_{n+1}, \forall\, n \geq 0$. Arătaţi că pentru orice număr natural n are loc inegalitatea:

$$x_n \leq 3\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} |z-1-i| \leq \sqrt{2} \\ |z-3+i| = |z-1-i| \\ |z-3+i| \geq \sqrt{2} \end{cases}$, unde $z \in \mathbb{C}$.

PROBLEMA 2. Considerăm mulţimea $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \mathbb{C}^*$ $(n \geq 2)$ cu proprietatea că $a_i \cdot a_j \in M$, pentru orice $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

a) Să se arate că $M = U_n$, unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$;

b) Să se determine numărul de elemente ale mulţimii $\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$, unde $f : [0,1] \to \mathbb{C}$, este funcţia definită prin $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{[n \cdot x]}$.

PROBLEMA 3. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

a) Să se arate că funcţia f este bijectivă şi să se determine inversa ei f^{-1};

b) Să se determine soluţiile întregi ale ecuaţiei $2^x - 2^{-x} = \log_2 \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}$.

PROBLEMA 4. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\dfrac{a^{x^2}}{b^{2x}} + \dfrac{b^{x^2}}{a^{2x}} = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$, unde $a, b > 1$.

[1]Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2]Toate problemele sunt obligatorii;
[3]Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a XI – a

PROBLEMA 1. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{Q})$ astfel încât $\det\left(\sqrt{2}A + B\right) = \det\left(A + B\sqrt{3}\right) = 0$. Demonstraţi că:

a) $\det A = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}\left(A^2\right)\right]$;

b) $\det A = \det B$;

c) $\operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A \cdot B)$.

PROBLEMA 2. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât $A^2 + A + I_n = O_n$. Aflaţi n, ştiind că $\det(A^n + I_n) = 2^{2016}$.

PROBLEMA 3. Fie $a \in (0, 1)$. Definim şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, prin $x_0 > 0$ şi

$$x_n = a^2 + a + \sqrt{x_{n-1}} - 2a\sqrt{a + \sqrt{x_{n-1}}}, \quad n \geq 1.$$

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi să se determine limita sa.

PROBLEMA 4.

a) Aflaţi parametrii $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{an^2 + bn + c} - n - 2\right) = 2018$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(n\pi\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 5n - 2}\right)$.

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 17. 02. 2018

Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Fie $(G, \cdot)$ un grup, iar H_1, H_2 şi H trei subgrupuri ale sale. Să se arate că:

a) $H_1 \cap H_2$ este subgrup al lui G;

b) $H_1 \cup H_2$ este subgrup al lui G, dacă şi numai dacă $H_1 \subseteq H_2$ sau $H_2 \subseteq H_1$;

c) $H \subseteq H_1 \cup H_2$, dacă şi numai dacă $H \subseteq H_1$ sau $H \subseteq H_2$.

PROBLEMA 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$. Arătaţi că $x^{2020} = y^{2020} = e$, unde e este elementul neutru al grupului.

PROBLEMA 3. Să se calculeze $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\{x\}}{\sin x} dx$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x.

PROBLEMA 4. Să se determine funcţiile integrabile $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$f(x) - \int_0^1 (x + y) \cdot f(y)dy = x, \quad \forall\, x \in [0; 1].$$

[1] Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;
[2] Toate problemele sunt obligatorii;
[3] Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.